РЕШЕНИЯ ЗАДАНИЙ
открытой олимпиады по математике «Будущее Кузбасса»

1. Разность квадратов баллов, набранных на олимпиаде девушками и юношами, равна 2017.
Сколько баллов набрали девушки и сколько юноши?

Решение:
x – сумма баллов, набранных девушками, y – юношами.
По условию $x^2 - y^2 = 2017$.
2017 – простое число (нужно проверить!), поэтому
$(x-y)\cdot(x+y) = 1\cdot 2017$. Отсюда следует, что

$\begin{cases} x-y=1 \\ x+y=2017 \end{cases}$. Решение системы x=1009, y =1008.

Ответ: девушки набрали 1009 баллов, юноши – 1008 баллов.

2. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x + \frac{3}{5}y = 5 \\ \frac{1}{3}x - \frac{1}{5}y = \frac{1}{6} \end{cases}$$

Решение: Перепишем систему уравнений в виде

$$\begin{cases} 10x + 9y = 75 \\ 30x - 18y = 15 \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на 2 и сложим его со вторым уравнением, получим $50x = 165$, отсюда x=3,3. Подставляем найденное значение x в первое уравнение и вычисляем y=14/3.

Ответ: x=3,3; y=14/3.

3. Количество студентов в университете, увеличиваясь на одно и то же число процентов ежегодно, возросло за три года с 5000 до 6655 человек.
На сколько процентов увеличивалось число студентов ежегодно?

Решение: Обозначим искомое число процентов за x.

По условию задачи имеем $5000 \cdot (1 + \frac{x}{100})^3 = 6655$. Отсюда находим: $x = (\sqrt[3]{\frac{6655}{5000}} - 1) \cdot 100 = 10$.

Ответ: число студентов в университете, увеличиваясь ежегодно на 10%.

4. Из Кемерово в Новокузнецк катер плывет 8 часов, а из Новокузнецка до Кемерово – 6 часов.
Сколько часов будет плыть плот из Новокузнецка до Кемерово?

Решение. Обозначим скорость катера x, скорость течения реки y, расстояние между Новокузнецком и Кемерово a. Скорость движения плота равна скорости реки, то есть y, а его время в пути из Новокузнецка до Кемерово будет равно $t=a/y$. По условию задачи имеем следующую систему уравнений

$$\begin{cases} 8 \cdot (x - y) = a \\ 6 \cdot (x + y) = a \end{cases}.$$

Разделим оба уравнения на y и получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 8 \cdot (x / y - 1) = t \\ 6 \cdot (x / y + 1) = t \end{cases}.$$

Умножаем первое уравнение на 3, второе уравнение на 4. После вычитания из второго уравнения первого уравнения получим $t = 48$.

Ответ: плот из Новокузнецка до Кемерово будет плыть 48 часов.

5. Упростите выражение

$$\frac{\left(ab^{-1}+a^{-1}b+1\right)\cdot\left(a^{-1}-b^{-1}\right)^2}{a^2b^{-2}+a^{-2}b^2-\left(ab^{-1}+a^{-1}b\right)}$$

Решение. Выпишем числитель:

$$\left(ab^{-1}+a^{-1}b+1\right)\cdot\left(a^{-1}-b^{-1}\right)^2=\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+1\right)\cdot\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2=\left(\frac{a^2+b^2+ab}{ab}\right)\cdot\left(\frac{b-a}{ab}\right)^2=$$

$$=\frac{(a^3-b^3)\cdot(a-b)}{a^3\cdot b^3}.$$

Выпишем знаменатель:

$$a^2b^{-2}+a^{-2}b^2-\left(ab^{-1}+a^{-1}b\right)=\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}-\frac{a}{b}-\frac{b}{a}=\frac{a^4+b^4-a^3b^2-a^2b^3}{a^2b^2}=$$

$$=\frac{a^3\cdot(a-b)-b^3\cdot(a-b)}{a^2\cdot b^2}=\frac{(a^3-b^3)\cdot(a-b)}{a^2\cdot b^2}.$$

После этих преобразований и сокращений равных множителей в числителе и знаменателе окончательно получим $a^{-1}\cdot b^{-1}$.

Ответ: $a^{-1}\cdot b^{-1}$.

6. Решите неравенство

$$x^3+8x^2+19x+12<0$$

Решение: Найдем корни уравнения $x^3+8x^2+19x+12=0$. Корни должны быть отрицательными. Из разложения 12 на множители 1,3,4 можно проверкой установить, что уравнение имеет корни -1, -3, -4. Определяем знаки левой части неравенства на интервалах (-∝; -4), (-4; -3), (-3; -1), (-1; +∝). Неравенству удовлетворяют интервалы (-∝; -4) и (-3; -1).

Ответ: (-∝; -4) ∪ (-3; -1).

7. Установите, не пользуясь калькулятором, что больше:
$\sqrt{2016}+\sqrt{2018}$ или $2\sqrt{2017}$?

Решение: Возведем каждое выражение в квадрат и получим, что левое выражение равно $2016+2\cdot\sqrt{2016\cdot 2018}+2018$,
а правое выражение равно $4\cdot 2007$.
Вычтем из каждого выражения сумму 2016+2018 = 2·2017.
После этого запишем левое выражение как
$2\cdot\sqrt{(2017-1)\cdot(2017+1)}=2\cdot\sqrt{2017^2-1}$.
Сравнивая этот результат с правым выражением 2·2017, видим, что правое выражение больше левого.

Ответ: большее значение имеет $2\sqrt{2017}$.

8. Укажите решения уравнения:
$\mathrm{tg}x+\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=-2$ в интервале (0; π).

Решение: Воспользуемся формулой для тангенса суммы двух углов и перепишем заданное уравнение в следующем виде:
$tgx+\frac{1+tgx}{1-tgx}=-2$.
Обозначим $tgx=t$, уравнение перепишется как
$t+\frac{1+t}{1-t}=-2$.
После умножения левой и правой части уравнения на
(1-*t*) и приведения подобных членов уравнения, будем иметь $t^2=3$ и $tg^2x=3$. Тогда $tgx=\sqrt{3}$ или $tgx=-\sqrt{3}$. Находим решения этих уравнений в интервале (0; π).
Этому условию удовлетворяет π/3 и 2π/3.

Ответ: π/3; 2π/3.