РЕШЕНИЯ ЗАДАНИЙ
открытой олимпиады по математике
«Будущее Кузбасса»-2016 для учащихся 10-11^{х} классов
Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева

1. Разложите число 2017 на разность квадратов целых чисел.
Решение.
$a^2 - b^2 = (a-b)\cdot(a+b) = \pm 1\cdot(\pm 2017)$, (2017 простое число).

Первое решение $\begin{cases} a-b=1 \\ a+b=2017 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1009 \\ b=1008 \end{cases}$

Ответ. Имеем 4 решения с учетом знаков: $a = \pm 1009; b = \pm 1008.$

2. Укажите решения уравнения
$(\sin x)^{2016} = (\cos 2x)^{2016}$ в интервале (-π/2; 0).
Решение.
а) $\sin x = \cos 2x,\quad \sin x = 1 - 2\sin^2 x,\quad 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0,\quad \sin x = t,\ -1 \le t \le 1.$

$t^2 + t - 1 = 0,\ t_1 = 0{,}5 = \sin x,\ t_2 = -1 = \sin x.$ Решений в интервале (-π/2; 0) нет.

б) $\sin x = -\cos 2x,\quad \sin x = -1 + 2\sin^2 x,\quad 2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0,\quad \sin x = t,\ -1 \le t \le 1.$

$2t^2 - t - 1 = 0,\ t_1 = 1 = \sin x,\ t_2 = -0{,}5 = \sin x.$ В интервале (-π/2; 0) x = -π/6.
Ответ: -π/6.

3. Решите неравенство $2\log_5 x - \log_x 125 < 1.$
Решение.
ОДЗ: $x > 0, x \ne 1.$

$2\log_5 x - \dfrac{3}{\log_5 x} - 1 < 0,\ \log_5 x = t$, ($t$≠0), $2t - \dfrac{3}{t} - 1 < 0,\ \dfrac{2t^2 - t - 3}{t} < 0.$

Находим нули числителя и знаменателя: -1, 0, 3/2, и устанавливаем знаки левой части неравенства на полученных интервалах. Неравенство для t выполняется в интервалах (-∞;-1), (0;3/2), а для x – в интервалах (0;1/5), (1; $5^{3/2}$).
Ответ: (0;1/5)∪ (1; $5^{3/2}$).

4. При каких значениях параметра ***a*** парабола $y = x^2 + a$ касается линии $y = |ax|$?
Решение.
Так как заданные функции четные, рассмотрим случай касания их графиков для $x \ge 0$.
При $a \ge 0$ условие пересечения графиков в одной точке соответствует условию единственного решения уравнения $x^2 + a = ax, x^2 - ax + a = 0,$ D = $a^2 - 4a = 0,\ a_1=0,\ a_2=4.$
При a = 0 графики функций $y = x^2$ и y = 0 касаются в точке x=0. (Рис.1 а).

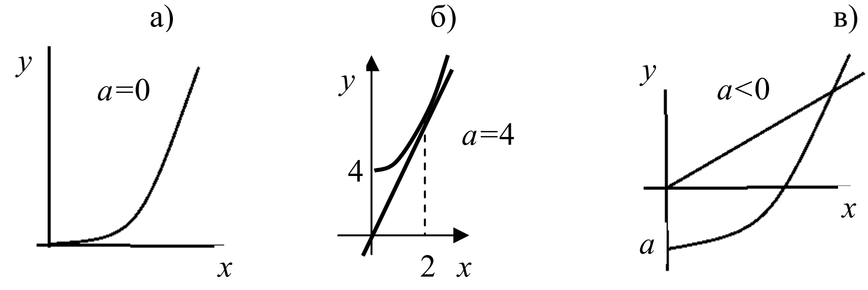


Рис. 1

При $a = 4$ имеем, что линии $y = x^2+4$ и $y = 4x$ пересекаются в единственной точке x=2. Проверяем касание графиков функций в этой точке по условию равенства производных: $y' =(x^2+4)' = 2x$; $y' =(4x)' =4$. При x=2 производные равны (рис.1 б).
При $a < 0$, как показано на рис.1 в), прямая всегда пересекает параболу, но не касается ее.
Ответ: 0;4.

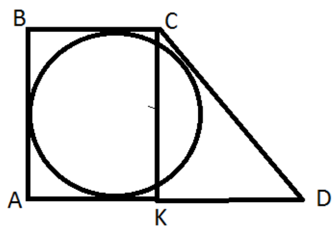
5. Сколько раз нужно бросить монету, чтобы вероятность выпадения «орла» хотя бы один раз была бы больше 0,9?
Решение. Событие A – хотя бы 1 раз выпадет «орел» за n бросаний противоположно событию B – в каждом из n бросаний выпадет только «решка».
$P(B) = 1/2^n$, $P(A) = 1 – P(B) = 1 – 1/2^n$.
Последовательно вычисляем вероятности события A для n =1, 2, 3,…
При n =4 имеем, что $P(A) = 15/16 > 0{,}9$.
Ответ: 4 раза.

6. Вклад в банке за первые несколько месяцев под 25% ежемесячно и несколько последующих месяцев под 20% ежемесячно вырос в 2,7 раза. Сколько месяцев начислялось 25%, и сколько месяцев – 20%?
Решение. Пусть вклад равен 1. Через x месяцев с начислением 25% и y месяцев с начислением 20% сумма вклада составит $1\cdot(1+0{,}25)^x\cdot(1+0{,}2)^y = 2{,}7$.
Или

$$\left(\frac{5}{4}\right)^x\cdot\left(\frac{6}{5}\right)^y=\frac{27}{10},\text{ или }\frac{5^{x-y}}{2^{2x}}\cdot 2^y\cdot 3^y=\frac{3^3}{2\cdot 5},\text{ или }5^{x-y}\cdot 2^{y-2x}\cdot 3^y=5^{-1}\cdot 2^{-1}\cdot 3^3.$$

Приравнивая показатели степеней в левой и правой частях уравнения, получаем $x = 2$, $y = 3$.
Ответ: 2 месяца начислялось 25% и 3 месяца – 20%.

7. Около круга с радиусом 2 описана прямоугольная трапеция, меньшая сторона которой равна 3. Вычислите площадь трапеции.
Решение.
AB = CK = 4 (диаметр окружности). AK = BC = 3.



KD = x. CD = $\sqrt{CK^2+KD^2}=\sqrt{16+x^2}$.
С учетом равенства отрезков касательных к окружности, проведенных из одной точки получим, что BC + AD = AB + CD.

$3 + 3 + x = 4 + \sqrt{16+x^2}$,

$x + 2 = \sqrt{16+x^2}$, $x^2 +4x +4 = 16 + x^2$, $4x = 12$, $x = 3$, AD = 6.

Вычисляем площадь трапеции: $S=\frac{BC+AD}{2}\cdot AB=\frac{3+6}{2}\cdot 4=18.$

Ответ: 18.

8. Расшифруйте слово 12 21 09 04 20 21, относящееся к проводимой олимпиаде. Здесь каждой паре цифр соответствует одна буква.
Решение.
Каждое число соответствует порядковому номеру буквы в алфавите: 12 – К, 21 – У.
9 – З, 4 – Г, 20 – Т.
Ответ: КузГТУ.